**Лабораторная работа №4**

**ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ**

**1. Цель работы**

Ознакомление с методами экстраполяции, методами оценки погрешности с помощью экстраполяции, методами уточнения результатов численного эксперимента.

**2. Задачи работы**

Овладение методами практической оценки погрешности результатов численных экспериментов и методами уточнения результатов расчетов с помощью экстраполяции.

# 3. Вводная часть

В прикладной математике часто приходится решать следующую задачу. Пусть для последовательности {*zn*} известно *N* первых членов. Можно ли, используя эту информацию:

1. установить, что данная последовательность сходится к пределу;
2. найти этот предел;
3. оценить погрешность, с которой был найден этот предел;
4. используя какой-нибудь критерий, оценить надежность оценки погрешности?

На первый взгляд может показаться, что эта задача не решаема – слишком мало информации. Действительно, в общем случае *N* первых членов полностью последовательность не определяют, и, начиная с *N*+1-го номера, последовательность может вести себя непредсказуемым образом. В математике такие задачи принято называть некорректными.

Однако на практике такие задачи возникают очень часто. Предсказание положения движущегося тела, прогноз условий функционирования различных систем, многие задачи проектирования и управления можно отнести к задачам такого типа. В прикладной математике эти задачи называются задачами экстраполяции.

Примеры показывают, что в начальных элементах последовательности содержится гораздо больше информации о ее пределе, чем мы предполагаем, и вопрос состоит в том, как ее извлечь.

Один из способов оценки погрешности состоит в сравнении вычисленного значения с экстраполированным. Экстраполяция применяется также для ускорения сходимости последовательностей. Известные методы ускорения сходимости основаны на том, что по исходной последовательности {*zn*} ищется новая последовательность , которая стремится к тому же пределу , но быстрее. В некоторых случаях за счет ускорения сходимости удается получить результаты, которые другим способом не могли бы быть получены за приемлемое время.

# 4. Теоретические основы

**4.1. Постановка задачи**

Задача определения предела встречается в практике вычислений очень часто. При вычислении сумм сходящихся рядов, например,

, (2.1)

мы имеем дело с последовательностью частичных сумм

, (2.2)

для которой требуется найти предел при *n*→∞.

При вычислении определенного интеграла численным методом, увеличивая число узловых точек сетки *n*, мы также приходим к некоторой последовательности

. (2.3)

Решение различных задач для дифференциальных уравнений методом конечных разностей (и другими методами) при увеличении числа узловых точек *n* приводит к последовательности.

Список примеров, в которых получается последовательность, предел которой желательно установить, может быть продолжен. Это решение уравнений, систем уравнений, поиск экстремума функций итерационными методами и т.д.

Итак, в общем случае **задача** сводится к следующему. Имеется несколько членов последовательности , номера которых расположены, может быть, не подряд, а выборочно по какому-нибудь закону, либо произвольно. Необходимо по этим данным найти приближенно предел последовательности *z*. Тогда разность *zi*−*z* можно использовать для оценки погрешности приближенного значения *zi*. Однако, поскольку само значение *z* получено прибли­женно, необходимо также иметь критерий, по которому можно судить о мере надежности этой оценки (или о ее точности). Совокупность оценки и критерия ее надежности позволяет принять решение об окончании расчетов, если можно утверждать, что заданная точность достигнута, или о необходимости продолжения исследований.

Из многообразия методов экстраполяции рассмотрим только такие, которые требуют знания численных значений *zi*, а не их аналитического выражения через номер *i*.

**4.2. Экстраполяция при известном порядке аппроксимации**

В качестве исходного положения будем считать, что известна некоторая приближенная зависимость *zn* от *n*, которую будем назы­вать математической моделью погрешности. Например, результат вычислений *zn* некоторого численного метода, имеющего *k*–й порядок точности (или порядок аппроксимации), можно представить в виде

, (2.4)

где *z* – точное значение; *zn* – приближенный результат, полученный при числе узловых точек (или числе слагаемых суммы), равном *n*; *c*1 – коэффициент, который предполагается не зависящим от *n*; *k* –порядок точности метода; δ(*n*) – величина, полагаемая малой по сравнению с *c*1*n-k* при тех значениях *n*, которые использовались в данных конкретных расчетах.[[1]](#footnote-2)

**Правило Ричардсона.** Одним из наиболее распространенных способов экстраполяции является правило Ричардсона [1], основан­ное на предположении о справедливости математической модели (2.4).

В этом случае, отбросив δ(*n*) в (2.4), получаем одно уравнение с двумя неизвестными *c*1 и *z*. Чтобы получить второе уравнение, используем другой известный член последовательности . Пусть *n*1=*n*/*Q* (*Q*>0), тогда приходим к системе двух уравнений

 (2.5)

Вычитая первое уравнение из второго, найдем

,

откуда нетрудно найти *c*1, а тем самым и *z*:

. (2.6)

С помощью (2.6) определяется экстраполированное (по **правилу Ричардсона**) значение искомого параметра *z*=*z*\*, а с его помощью находится оценка *zn‑z*\* погрешности приближенного значения *zn*. Этот способ оценки погрешности называется **правилом Рунге**.

**Метод Ромберга.** В некоторых случаях можно построить более подробную математическую модель погрешности, представив приближенный результат в виде суммы

. (2.7)

Тогда, чтобы найти неизвестные *z*, *c*1,…,*cL* нужно использовать *L*+1 значение *zi* и записать задачу в виде системы линейных уравнений, пренебрегая малыми величинами:

 (2.8)

Эта задачу можно решить путем построения интерполяционного многочлена Лагранжа [1,2] *L*-й степени



и экстраполяцией его до *n*→∞

 (2.9)

(в скобках перечислены числа *zi*, которые использованы для получения экстраполированного значения *z*).

Интерполяционная формула обладает весьма полезным для практического применения свойством. Значение *z*, которое получа­ется по формуле (2.9), может быть найдено путем последовательного применения рекуррентного соотношения Эйткена

, (2.10)

то есть для получения экстраполированного значения *L*+1-го порядка можно использовать два значения *L*-го порядка, вычисленные для двух наборов данных *zi*, причем номер первой точки одного набора сдвинут на единицу относительно другого.

В случае, если *nj*=*n*1*Q* *j*−1, выражение (2.10) принимает вид



, (2.11)

что при *L*=1 совпадает с (2.6), а при *L*>1 представляет собой аналогичное выражение, в котором вместо вычисленных участвуют экстраполированные значения.

Для уменьшения объема расчетов величина *Q* обычно выбирается равной 2 как наименьшему натуральному числу, большему 1.

Результаты экстраполяций удобно представлять в виде треугольной матрицы



Аналогичный подход имеет место и в случае, когда номер члена последовательности увеличивается на единицу (т.е. *nj*+1=*nj*+1). Для последовательности {*zn*} строится **таблица Нэвилла** [7,8], представляющая собой матрицу  (*L*=0,1,…, *n*≥*L*+1), в которой нулевой столбец (*L*=0) – исходная последовательность, а все остальные столбцы находятся по правилу

, (2.12)

которое получается из (2.10) при , .

В более общем случае математическая модель погрешности представляется в виде

, (2.13)

где *k*1,…, *kL* – произвольные действительные числа (*k*1<*k*2<…< *kL*). Тем не менее, при *nj*=*n*1*Q* *j*−1 задача определения коэффициентов *ci* и экстраполиро­ванного значения *z* решается аналитически, если применить метод численной фильтрации. Подставив в (2.13) *nj*=*n*1*Q* *j*−1, получим систему уравнений:

 (2.14)

Рассмотрим два значения , , вычисленные при числе узлов, равном  и  соответственно. Составим линейную комбинацию



и потребуем, чтобы суммарный коэффициент при *z* был равен 1, а при  (для определенного *j*) равен 0. Отсюда получим формулу фильтрации, которая совпадает с Ричардсоновской экстраполяционной формулой (2.6)

. (2.15)

Таким образом, определение искомого значения *z* и в случае произвольных (в общем случае не целых) показателях *ki* (но только при *nj*=*n*1*Q* *j*−1) сводится к повторному использованию уточнения (2.6), то есть к методу фильтрации, аналогичному методу Ромберга.

В случае *nj*≠*n*1*Q* *j*−1 задача экстраполяции сводится к решению системы *L*+1 линейных уравнений типа (2.14) численным методом.

Главным ограничением для применения рассмотренных методов, основанных на разложении по степеням *n*, является то, что показатели степеней *kj* должны быть известны заранее.

**5. Верификация методов оценки погрешности.**

**Повторная экстраполяция**

**5.1. Критерий качества оценки погрешности**

При использовании перечисленных методов оценки погрешности возникает вопрос о допустимости отбрасывания малых δ(*n*).

Какой критерий можно для этого применить? Если может быть найдена оценка погрешности  оценки погрешности , то отношение этих оценок по модулю должно быть существенно меньше единицы:

. (2.16)

Это означает, что относительная *размытость* оценки  мала, и такой оценке **можно доверять**. Если же [[2]](#footnote-3), то ширина области размытости сравнима с  и такую оценку следует **отвергнуть**.

Поскольку величина  получается в виде разности  (где −экстраполированное значение), то оценкой погрешности величины  является оценка погрешности экстраполированного значения  (с обратным знаком).

Какая информация может быть использована для получения такой оценки? Мы рассматриваем задачу о нахождении оценок по­грешности в условиях, когда известны только численные значения *zn*.

Применим следующий подход. Обозначим  экстраполиро­ванное число , полученное с помощью какого-нибудь из изложенных методов при конкретном *n*. Тогда, увеличивая (или уменьшая) *n* (в *Q*, *Q*2, и т.д. в *Qm* раз), мы можем получить последовательность уточненных значений . Теперь представим  в виде (2.4)

 (2.17)

и получим дважды экстраполированное значение , повторив экстраполяцию по Ричардсону по формуле (2.6), (где вместо  используем ), или методом Ромберга увеличив *L*. Разность  является искомой оценкой погрешности экстраполиро­ванного значения .

Отметим, что в результате указанных действий получаются дважды экстраполированные значения , погрешность которых также может быть оценена путем повторной (третьей по счету) экстраполяции. Если эта оценка мала по сравнению с , то экстраполированные величины  могут быть использованы как уточненные значения с известной оценкой погрешности и мерой ее размытости.

Процесс экстраполяции может повторяться до тех пор, пока очередное отношение ширины области размытости к величине самой оценки не приблизится к 1 или не превысит единицу.

**Примечание.** Идея повторной экстраполяции не полностью совпадает с идеей ускорения сходимости последовательностей. В результате повторной экстраполяции получается несколько последовательностей, а в результате ускорения – только одна («ускоренная»). Наличие нескольких последователь­ностей позволяет провести оценку скорости сходимости каждой из них и сформулировать критерий размытости оценок, без проверки выполнения которого проведение экстраполяции может привести не к уточнению, а к огрублению результатов.

**5.2. Оценка погрешности методов повторной экстраполяции**

Чтобы оценить качество различных методов экстраполяции, проанализируем ошибку, возникающую при применении этих методов. При этом ограничимся двумя экстраполяциями.

Представим *zi* в виде

. (2.18)

Будем считать *k*1 и *k*2 известными.

Применим формулу (2.6) для первой экстраполяции. Получим два значения

, , (2.19)

.

Найдем погрешность экстраполированных значений. Для этого подставим в (2.19) разложение (2.18)



, (2.20)

. (2.21)

Сравнивая (2.20) и (2.21) нетрудно видеть, что при *Q*1=*Q*2=*Q* величины  представляются в виде

, где ,

и для следующей экстраполяции может быть опять использована формула (2.6), которая даст точное значение *z*. Разность

 (2.22)

представляет собой погрешность, вносимую экстраполяцией.

При *Q*1≠*Q*2 зависимость погрешности от *n* имеет вид более сложный, чем *cjn−k*. Игнорирование этого факта (что имеет место при повторном применении формулы (2.6)) может привести к ухудшению оценки.

При применении точной интерполяционной формулы значение *z* вычисляется в виде суммы

,

причем γ выбирается так, чтобы суммарная погрешность оказалась равной нулю. Это условие приводит к равенству

,

откуда получим

. (2.23)

В этом заключается разница между повторной экстраполяцией по формуле (2.6) и применением интерполяционной формулы (2.10). Эта разница исчезает, если *Q*1=*Q*2, так как (2.23) приобретает вид

, , (2.24)

который совпадает с (2.6).

**Накопление погрешности экстраполяции.** Если исследуемая последовательность представляется суммой (2.13), то применение повторной экстраполяции приводит к изменению коэффициентов суммы

.

При *kL*>>*k*1 увеличение абсолютной величины коэффициентов может оказаться весьма существенным. Это ограничивает число возможных экстраполяций.

**О погрешности исходных данных.** Величина δ(*n*) в (2.13) может оказаться суммой регулярной составляющей, имеющей вид *cjn*-*k*, и нерегулярной составляющей δ(0), обусловленной погрешностью исходных данных, которая, например, связана с ограниченной разрядностью чисел в машинном представлении. Тогда исходная нерегулярная часть погрешности, содержащаяся в вычисленных значениях *zi*, при каждой экстраполяции умножается на коэффициент:

.

Для метода Ромберга, применяемого к последовательности (2.7) (*kj*=*i*), произведение таких множителей ограничено числом, приблизительно равным 8, т.е. метод Ромберга и его модификации является устойчивыми к погрешности исходных данных[[3]](#footnote-4).

При применении формулы Нэвилла (2.12) справедливы следующие оценки

. (2.25)

Действительно, в соответствии с методом полной математической индукции неравенство (2.25) верно для *L*=1

.

Если (2.25) верно для *L*-1, то





.

Таким образом, , и формула Нэвилла неустойчива к погрешности исходных данных. Поэтому при ее применении имеет смысл уменьшить эту погрешность. Например, если имеется возможность прямого вычисления разностей Δ*j*=*zj*0-*zj*-1,0 (при вычислении частичных сумм это можно сделать весьма просто), алгоритм экстраполяции можно видоизменить



.

После получения таблицы с заданной погрешностью, которая оценивается по формуле



восстанавливается значение *zjL*, равное

,

причем для уменьшения погрешности округления суммирование следует проводить в обратном порядке.

**6. Численный эксперимент**

В табл. 2.1 представлены результаты расчетов сумм (2.2) при α=1.1 для *n*=2*j*. Поскольку сумма этого ряда может быть вычислена независимо через интегралы [9]

,

этот пример взят в качестве тестового. (При α=1.1 сумма ряда (2.1) *z*точн≈10.5844484649508098).

Для ряда (2.1) справедливо разложение



, (2.26)

где *Bj* – числа Бернулли.

Отметим, что коэффициенты *cj* при  не убывают при *j*→∞, что, тем не менее, не мешает проводить весьма точные экстраполяции по *n* при фиксированных *j*.

Будем считать известными показатели при *n*, и используем метод Ромберга для оценки погрешности частичных сумм.

Как видно из табл. 2.1, погрешность  вычисленных значений весьма велика (~3) даже для достаточно больших *n*. Оценка погрешности  по формуле (2.6) при всех приведенных в таблице *n* вполне приемлема, а для *n*>500 совпадает с самой погрешностью с точностью не ниже 3-х десятичных знаков. Погрешность  уточненных значений при увеличении *n* быстро уменьшается.

Отношение погрешностей , характеризующее размытость оценок, не превышает 0.3 и уменьшается в два раза при удвоении *n*. Погрешность  дважды экстраполированных значений существенно меньше, чем погрешности вычисленных чисел и результатов первой экстраполяции.

Таблица 2.1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* |  |  |  |  |  |  |
| 2 | -9.11 | -6.49 | -2.61100 | 2.8710-1 | - | - |
| 4 | -8.60 | -7.19 | -1.40100 | 1.6310-1 | -3.5010-1 | 2.4810-1 |
| 8 | -8.07 | -7.36 | -7.0610-1 | 8.7510-2 | -9.2510-2 | 1.3110-1 |
| 16 | -7.55 | -7.21 | -3.4110-1 | 4.5210-2 | -2.2410-2 | 6.5710-2 |
| 32 | -7.06 | -6.89 | -1.6210-1 | 2.2910-2 | -5.2910-3 | 3.2610-2 |
| 64 | -6.59 | -6.51 | -7.6310-2 | 1.1510-2 | -1.2310-3 | 1.6210-2 |
| 128 | -6.15 | -6.11 | -3.5710-2 | 5.8110-3 | -2.8910-4 | 8.0810-3 |
| 256 | -5.74 | -5.72 | -1.6710-2 | 2.9110-3 | -6.7410-5 | 4.0310-3 |
| 512 | -5.35 | -5.35 | -7.8010-3 | 1.4510-3 | -1.5710-5 | 2.0110-3 |
| 1024 | -4.99 | -4.99 | -3.6410-3 | 7.2810-4 | -3.6710-6 | 1.0010-3 |
| 2048 | -4.66 | -4.66 | -1.7010-3 | 3.6410-4 | -8.5610-7 | 5.0310-4 |
| 4096 | -4.35 | -4.35 | -7.9310-4 | 1.8210-4 | -1.9910-7 | 2.5110-4 |
| 8192 | -4.06 | -4.06 | -3.7010-4 | 9.1110-5 | -4.6510-8 | 1.2510-4 |
| 16384 | -3.78 | -3.78 | -1.7210-4 | 4.5510-5 | -1.0810-8 | 6.2910-5 |
| 32768 | -3.53 | -3.53 | -8.0510-5 | 2.2710-5 | -2.5310-9 | 3.1410-5 |
| 65536 | -3.29 | -3.29 | -3.7510-5 | 1.1310-5 | -5.9110-10 | 1.5710-5 |
| 131072 | -3.07 | -3.07 | -1.7510-5 | 5.6910-6 | -1.3710-10 | 7.8610-6 |

В результате первая экстраполяция при *N*≈105 уменьшает погрешность результатов до 10-5, а вторая − до 10-10. Нетрудно подсчитать, что для получения такой точности путем прямого вычисления сумм потребуется более 1050 − 10100 слагаемых. На современном компьютере это заняло бы более 1030 лет.

Результаты расчетов и оценок удобно представить в виде графика (рис. 2.1), где по оси абсцисс отложены десятичные логарифмы *n*, а по оси ординат – десятичные логарифмы абсолютных величин погрешностей (десятичные логарифмы более удобны с точки зрения наглядности, так как легко определяются порядки погрешностей и чисел *n*). В таком представлении зависимости близки к линейным.

На рис. 2.1 цифрой *0* обозначена зависимость погрешностей *zn*−*z* рассчитанных результатов, цифрами (*1*)-(*5*) обозначены результаты последовательного вычитания из *zn*−*z* одного, двух и трех и т.д. слагаемых  согласно (2.26). Тем самым, рис. 2.1 есть иллюстрация того, как должен работать идеальный метод экстраполяции.

Ограничение графиков на уровне, соответствующем величине погрешности порядка нескольких единиц 17-го разряда объясняется ограниченной разрядностью чисел в машинном преставлении.

|  |  |
| --- | --- |
| а) | б) |

Рис. 2.1. Результаты «идеальной экстраполяции»: а) – при удвоении числа слагаемых; б) – при увеличении числа слагаемых на единицу

На рис. 2.2 приведены результаты применения повторной экстраполяции по методу Ромберга (2.11) при *Q*=2. Цифрой *1* обозначена зависимость погрешностей результатов, экстраполирован­ных один раз, цифрой *2* – два раза и т. д. Величина *k*1 при оценке равнялось 0.1 и далее при возрастании номера *j* значение *kj* увеличивалось на 1. Поскольку согласно (2.26) слагаемое с *kj*=3.1 отсутствует, прямые *3* и *4* совпадают. Из рис. 2.2,а видно, что путем повторной экстраполяции получаются хотя и не идеальные, но весьма точные результаты. При этом наклон прямых на рис. 2.1,а и 2.2 совпадает, однако прямые, полученные экстраполяцией, смещены вниз относительно идеальных. Это объясняется погрешностью экстраполяции, оценка которой дается формулой (2.22).

|  |  |
| --- | --- |
| а) | б) |

Рис. 2.2. Результаты экстраполяции данных, полученных при удвоении числа слагаемых, с помощью метода Ромберга: а) – сравнение с эталоном;

б) – оценки по правилу Рунге

**Примечание.** Если точное значение искомой величины неизвестно (а это при практических расчетах так и есть), то в таблицах и графиках для сравнения вместо точного можно использовать наиболее точное, полученное на последнем этапе экстраполированное значение. Более того, графики зависимостей логарифма оценок погрешности по Рунге  (рис. 2.2,б) практически не отличаются от приведенных на рис. 2.2,а. Тем не менее, имеет место разница (на один − два десятичных порядка) в величине предельного уровня погрешности округления, связанной с машинным представлением чисел.

Следует отметить, что разность между ординатами точек, соответствующих конкретному числу *n*, является десятичным логарифмом отношения погрешностей . Поэтому из графика следует, что относительная размытость полученных оценок весьма мала в области, где погрешность округления незначительна.

Если величина погрешности округления сравнима с погрешностью численного метода, то предположение о малости δ(*n*) в (2.4) теряет силу. Относительная размытость  оценки погрешности в этом случае имеет значение около единицы и условие (2.16) не выполняется. Однако, погрешности аппроксимации, превышающие погрешность округления на один порядок или больше, оцениваются весьма точно.

Для изучения возможности получения наибольшего уточнения результатов при малых *n* представляет интерес рассмотреть последовательность сумм, полученных при увеличении числа слагаемых на единицу. Для экстраполяции при этом необходимо численное решение системы линейных алгебраических уравнений типа (2.14). На рис. 2.3,а представлены результаты такой экстраполяции расчетов сумм (2.2) при α=1.1. Как видно из рис. 2.3,а, таким способом возможно получение уточнения до 6 знаков при *n*=10 и до 9 знаков при *n*=20−30. При удвоении числа слагаемых при таких *n* получается только 2−4 верных знака. Однако дальнейшее уточнение при увеличе­нии *n* на единицу невозможно из-за погрешности исходных данных. В то же время при удвоении *n* погрешность, связанная с неточностью исходных данных не растет так быстро и позволяет при той же длине мантиссы (порядка 16 десятичных разрядов) уточнить результат до 10-14 − 10-15 при *n*=1000−10000.

Как промежуточный вариант, возможно строить последователь­ность при увеличении числа слагаемых на некоторое постоянное число большее единицы. В качестве примера на рис. 2.3,б приводятся результаты, полученные при увеличении *n* на 100. Видно, что таким способом можно получить 12 точных знаков при *n*≈1000.

|  |  |
| --- | --- |
| а) | б) |

Рис. 2.3. Результаты экстраполяции данных при увеличении числа слагаемых на постоянную величину: а) – на единицу; б) – на 100

Тем не менее, остается справедливым вывод о том, что удвоение числа слагаемых позволяет получить большую точность, но при больших *n*. При увеличении *n* на константу для увеличения точности необходимо увеличение длины мантиссы машинного слова.

Метод Нэвилла (2.12) применяется для тех случаев, когда показатели разложения (2.13) *kj* увеличиваются на единицу, т.е. . Номера *n* членов последовательности также должны увеличиваться на единицу. Поэтому рассмотрим следующий пример

 (2.27)

Результаты применения экстраполяции с помощью таблицы Нэвилла к этой последовательности показаны на рис. 2.4,а. Поскольку последовательность (2.27) представляет алгебраический многочлен относительно *n*−1, то результаты второй экстраполяции дают теоретически точное значение. Остаточная погрешность вызвана ошибкой округления.

Следует отметить следующую особенность методов экстраполяции, предназначенных для использования членов последовательностей, номера которых увеличиваются на константу. Если не рассматривать один или несколько первых членов последовательности и перенумеровать остальные, то результаты экстраполяции могут сильно измениться (рис. 2.4,б).

|  |  |
| --- | --- |
| а) | б) |

Рис. 2.4. Результаты экстраполяции последовательности (2.27) с помощью таблицы Нэвилла, начинающейся: а) с 1-го номера; б) со 2-го номера

В результате рассмотрения примеров можно сформулировать следующие выводы.

Применение рассмотренных методов экстраполяции обусловлено как видом анализируемых последовательностей, так и порядком номеров членов последовательности, берущихся в рассмотрение.

Повторная экстраполяция позволяет существенно уточнить результаты даже для медленно сходящихся последовательностей, однако этот процесс существенно ограничивается ошибками исходных данных и округления.

Процесс экстраполяции должен контролироваться критерием, выполнение которого позволяет в некотором смысле гарантировать справедливость результатов.

**7. Порядок решения задачи на ЭВМ**

1. По указанию преподавателя выбрать метод экстраполяции (Ромберга (2.11), Нэвилла (2.12) или фильтрации (2.15)).
2. Составить подпрограмму, реализующую данный метод.
3. Предусмотреть в программе многократную экстраполяцию.
4. Оценить размытость оценки погрешности согласно п. 5.
5. Отладить программу путем экстраполяции частичных сумм (см. раздел 6 «Численный эксперимент»).
6. Применить программу для экстраполяции последовательности, заданной преподавателем. Результат оценки погрешности представить в виде графика (см. рис. 2.2) и в виде табл. 2.1.

**8. Требования к отчету по лабораторной работе**

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. файл исходного текста программы;
2. файлы результатов для тестового примера и для экстраполяции заданной последовательности;
3. описание алгоритма расчета (в текстовой форме и в виде блок-схемы) в электронном и распечатанном виде;
4. распечатку файлов п. 2) с комментариями;
5. общие выводы по результатам работы, включающие результаты тестирования, полученные оценки погрешности результатов и обоснование этих оценок.

**9. Вопросы для самопроверки**

1. Математические модели погрешности.
2. Область применения разных методов экстраполяции.
3. Оценка эффективности разных способов экстраполяции.
4. Влияние погрешности округления на результат экстраполяции.
5. Основное условие, ограничивающее применение методов экстраполяции типа Ромберга, основанных на применении интерполяционных формул.

1. Представление малой величины δ(*n*) в виде *o*(*n*−*k*) или *O*(*n*−*k−l*), употребляемое обычно в литературе, на наш взгляд не оправдано, так как поведение величины при ограниченных *n* может существенно отличаться от ее асимптотического поведения. С другой стороны, для проведения экстраполяции необходимо и достаточно, чтобы при расчетных *n* величина δ(*n*) была малой по сравнению с главной частью погрешности. В этом случае характер асимптотической зависимости величины δ(*n*) не имеет решающего значения. [↑](#footnote-ref-2)
2. Эта величина, установленная в [6] экспериментально, впоследствии получила теоретическое обоснование [25]. [↑](#footnote-ref-3)
3. Более того, как показывает численный эксперимент, нерегулярная погрешность практически не меняется при проведении экстраполяций. [↑](#footnote-ref-4)